Eine neue Form der Quantisierung der Dirac-Gleichung

Von Gerhard Simon

Institut für Theoretische Physik der Universität Gießen

(Z. Naturforschg. **18 a**, 88—89 [1963]; eingegangen am 23. Oktober 1962)

Eine der einfachsten Methoden, die Dirac-Gleichung

$$(\gamma_\mu \,\partial_\mu + \varkappa)\,\psi = 0 \tag{1}$$

zu quantisieren besteht darin, die Wellenfunktion ψ in einem Normierungsvolumen V in eine Fourier-Reihe zu entwickeln, die Fourier-Amplituden als Operatoren aufzufassen und Vertauschungsregeln für sie anzugeben. In Gl. (1) bedeuten γ_μ die vier Dirac-Matrizen, ∂_μ den Vierergradienten und $\varkappa$ die reziproke Compton-Wellenlänge.

Die Fourier-Zerlegung für ψ ist:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\substack{j=1\\p}}^{2} \left(a_{jp}\, u_{jp}\, e^{i(\mathfrak{p}\,\mathfrak{r}-\omega_p t)} + b_{jp}^{*}\, v_{jp}\, e^{i(\mathfrak{p}\,\mathfrak{r}+\omega_p t)}\right). \tag{2}$$

Dabei sind u_{jp}, v_{jp} $(j=1, 2)$ die zu jedem p-Wert gehörenden vier orthonormierten Bispinoren [1].

Mit dem Ansatz (2) erhält man für die Gesamtenergie des Feldes

$$H = \frac{\hbar}{2\,i} \iiint (\dot{\psi}^*\,\psi - \psi^*\,\dot{\psi})\,\mathrm{d}V \tag{3}$$

den Ausdruck

$$H = \sum_{j\cdot p} \hbar\,\omega_p\,(a_{jp}^{*}\,a_{jp} - b_{jp}^{*}\,b_{jp})\,. \tag{4}$$

Die Quantisierung wird nun dadurch geschaffen, daß man a_{jp} und b_{jp} als Operatoren ansieht und Vertauschungsregeln für sie angibt. Nach Jordan und Wigner wählt man die nicht-kanonischen Vertauschungsregeln

$$\boldsymbol{a}_{jp}\,\boldsymbol{a}_{jp}^{+} + \boldsymbol{a}_{jp}^{+}\,\boldsymbol{a}_{jp} = 1\,, \tag{5 a}$$

$$\boldsymbol{b}_{jp}\,\boldsymbol{b}_{jp}^{+} + \boldsymbol{b}_{jp}^{+}\,\boldsymbol{b}_{jp} = 1\,, \tag{5 b}$$

alle anderen Antikommutatoren verschwinden. (5 c)

Diese Wahl sichert, daß die „Besetzungszahloperatoren" $\boldsymbol{a}_{jp}^{+}\,\boldsymbol{a}_{jp}$ und $\boldsymbol{b}_{jp}^{+}\,\boldsymbol{b}_{jp}$ die Eigenwerte 0 und 1 haben. Man sieht sofort, daß dann der Hamilton-Operator

$$\boldsymbol{H} = \sum_{j\cdot p} \hbar\,\omega_p\,(\boldsymbol{a}_{jp}^{+}\,\boldsymbol{a}_{jp} - \boldsymbol{b}_{jp}^{+}\boldsymbol{b}_{jp}) \tag{4'}$$

auch negative Eigenwerte haben kann. Üblicherweise geht man hier zu einem neuen Hamilton-Operator über, bei dem der zweite Term mit einem positiven Vorzeichen auftritt. Man muß dann eine unendlich große Konstante weglassen. Wir wollen stattdessen die Vertauschungsregeln (5) so abändern, daß der Hamilton-Operator H von vornherein nur nicht-negative Eigenwerte hat. Zu diesem Zweck ersetzen wir (5 b) durch [2]

$$\boldsymbol{b}_{jp}\,\boldsymbol{b}_{jp}^{+} + \boldsymbol{b}_{jp}^{+}\,\boldsymbol{b}_{jp} = -\,1. \tag{5 b'}$$

Bei dieser neuen Vertauschungsregel hat der Operator $\boldsymbol{b}_{jp}^{+}\,\boldsymbol{b}_{jp}$ die Eigenwerte 0 und -1, was sofort aus

$$(\boldsymbol{b}_{jp}^{+}\,\boldsymbol{b}_{jp})^2 = -\,\boldsymbol{b}_{jp}^{+}\,\boldsymbol{b}_{jp}$$

zu ersehen ist. Also hat der Hamilton-Operator (4′) keine negativen Eigenwerte mehr.

Die Vertauschungsregel (5 b′) macht allerdings einige Abänderungen bei der Konstruktion des Hilbert-Raums erforderlich. Wir fordern zunächst die Existenz eines Vakuumelementes f_0 mit den Eigenschaften

$$(f_0, f_0) = 1, \qquad \boldsymbol{a}_{jp}\,f_0 = 0, \qquad \boldsymbol{b}_{jp}\,f_0 = 0.$$

Die übrigen Elemente des Hilbert-Raums sollen in der üblichen Weise durch Anwendung der Erzeugungsoperatoren $\boldsymbol{a}_{jp}$ und $\boldsymbol{b}_{jp}$ auf das Vakuumelement f_0 konstruierbar sein. Es treten dann jedoch Elemente auf, die wegen der Vertauschungsrelation (5 b′) eine negative Form haben, z. B.

$$(\boldsymbol{b}_{jp}^{+}\,f_0,\ \boldsymbol{b}_{jp}^{+} f_0) = (f_0, \boldsymbol{b}_{jp}\,\boldsymbol{b}_{jp}^{+}\,f_0) = -\,1.$$

Um dies zu verhindern, postulieren wir die Existenz eines metrischen Operators $\boldsymbol{\eta}$ (den wir als identisch mit dem bei der Quantisierung des elektromagnetischen Feldes nach der Methode von Gupta und Bleuler [3] auftretenden metrischen Operator annehmen können) mit den Eigenschaften:

$$(f_0, \boldsymbol{\eta}\,f_0) = 1, \qquad \boldsymbol{\eta}^2 = 1, \qquad \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^{+}. \tag{6}$$

Ferner soll $\boldsymbol{\eta}$ mit den $\boldsymbol{a}_{jp}$ kommutieren und mit den $\boldsymbol{b}_{jp}$ antikommutieren:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}\,\boldsymbol{a}_{jp} - \boldsymbol{a}_{jp}\,\boldsymbol{\eta} &= 0, \\ \boldsymbol{\eta}\,\boldsymbol{b}_{jp} + \boldsymbol{b}_{jp}\,\boldsymbol{\eta} &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Die Norm eines Elementes ist jetzt durch

$$\text{Norm } f = (f, \eta\, f)$$

definiert [4]. Dann sind die Normen aller Elemente des Hilbert-Raums, die aus f_0 durch Anwendung der Erzeugungsoperatoren $\boldsymbol{a}_{jp}^{+}$ und $\boldsymbol{b}_{jp}^{+}$ erzeugt werden können, positiv. Im erwähnten Beispiel ist

$$(\boldsymbol{b}_{jp}^{+} f_0,\ \boldsymbol{\eta}\,\boldsymbol{b}_{jp}^{+} f_0) = -\,(f_0, \boldsymbol{\eta}\,\boldsymbol{b}_{jp}\,\boldsymbol{b}_{jp}^{+}\,f_0) = +\,1.$$

[1] Siehe G. Källén, Handbuch der Physik V/1, S. 215.

[2] Zusatz nach der Einreichung der Arbeit: Herr Prof. Schlögl, Aachen, hat mich freundlicherweise darauf aufmerksam gemacht, daß solche Vertauschungsrelationen auch schon von R. Spitzer (Nucl. Phys. **33**, 614 [1962]) vorgeschlagen worden sind.

[3] Siehe z. B. W. Heitler, Quantum Theory of Radiation, Oxford 1960, S. 87 ff.

[4] Ganz allgemein lautet das Matrixelement eines Operators $\boldsymbol{A}$ zu den Elementen f_i und f_k: $A_{ik} = (f_i, \boldsymbol{\eta}\,\boldsymbol{A}\,f_k)$. Dann ist das Konjugiert-Komplexe des Matrixelementes b_{ik} gegeben durch $(b_{ik})^* = (\boldsymbol{\eta}\,\boldsymbol{b}\,f_k, f_i) = (f_k, \boldsymbol{b}^{+}\boldsymbol{\eta}^{+} f_i) = -\,(f_k, \boldsymbol{\eta}^{+}\,\boldsymbol{b}^{+} f_i) = -\,(f_k, \boldsymbol{\eta}\,\boldsymbol{b}^{+}\,f_i) = -\,b_{ki}^{+}$. Damit kann man nun sofort zeigen, daß der Operator $\boldsymbol{b}^{+}\,\boldsymbol{b}$ negative Diagonalelemente (und nicht positive wie der Operator $\boldsymbol{a}^{+}\,\boldsymbol{a}$) hat, denn es ist $(b^{+}\,b)_{ii} = \sum_k b_{ik}^{+}\,b_{ki} = -\sum_k (b_{ki})^*\,b_{ki}$.

Die übliche Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Quantenmechanik ist also wieder anwendbar.

Wenn man die hier vorgeschlagene Methode auf den Fall anwendet, daß das DIRAC-Feld mit dem elektromagnetischen Feld in Wechselwirkung steht, dann müssen noch weitere Änderungen vorgenommen werden. Die physikalischen Resultate sind jedoch die gleichen wie in der alten Formulierung.

Wir wollen annehmen, daß das elektromagnetische Feld nach der Methode von GUPTA und BLEULER quantisiert ist [3], jedoch spielt das im Augenblick keine wesentliche Rolle. Der HAMILTON-Operator des Gesamtsystems lautet

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{H}_{\mathrm{m}} + \boldsymbol{S}. \tag{8}$$

H_{e} ist jetzt der HAMILTON-Operator (4′), H_{m} der HAMILTON-Operator des freien elektromagnetischen Feldes und S ist der Wechselwirkungsterm:

$$\boldsymbol{S} = i\,e\,c \iiint \boldsymbol{A}_\mu \cdot \sigma(\overline{\boldsymbol{\psi}}\,\gamma_\mu\,\boldsymbol{\psi})\,\mathrm{d}V\,. \tag{9}$$

A_μ sind die elektromagnetischen Potentiale.

Das Symbol σ soll bedeuten, daß im Produkt $\overline{\psi}\,\gamma_\mu\,\psi$ die FOURIER-Amplituden von $\overline{\psi}$ und ψ in einer bestimmten Reihenfolge angeordnet werden sollen, *bevor* wir den Schritt zur Quantenmechanik machen. Wenn wir $\overline{\psi}$ und ψ in Anteile mit positiver Frequenz (Vernichtungsoperator) und mit negativer Frequenz (Erzeugungsoperator) aufteilen, soll das σ-Produkt definiert sein durch:

$$\sigma(\overline{\psi}\,\gamma_\mu\,\psi) = \gamma_\mu{}^{\alpha\beta}(\overline{\psi}_\alpha\,\psi_\beta{}^{(+)} + \psi_\beta{}^{(-)}\,\overline{\psi}_\alpha)\,. \tag{10}$$

Im Operatorenkalkül hat der Stromoperator

$$\boldsymbol{j}_\mu = i\,e\,c\,\sigma(\overline{\boldsymbol{\psi}}\,\gamma_\mu\,\boldsymbol{\psi})$$

den Vakuumerwartungswert Null. Es ist außerdem zu sehen, daß S kein hermitescher Operator ist, denn im Stromoperator stehen die Paarerzeugungs- bzw. Paarvernichtungsterme in der Reihenfolge

$$\overline{\boldsymbol{\psi}}_\alpha^{(+)}\,\boldsymbol{\psi}_\beta^{(+)} + \boldsymbol{\psi}_\beta^{(-)}\,\overline{\boldsymbol{\psi}}_\alpha^{(-)}.$$

Der HAMILTON-Operator muß jedoch auch nicht notwendigerweise hermitesch sein, sondern braucht, um reelle Eigenwerte zu besitzen, nur der Forderung

$$(\boldsymbol{\eta}\,\boldsymbol{H})^+ = \boldsymbol{H}^+\,\boldsymbol{\eta}^+ = \boldsymbol{\eta}\,\boldsymbol{H} \tag{11}$$

zu genügen. Mehr noch, dieser Forderung (11) wird nur Genüge getan, wenn im Stromoperator bei den Paarerzeugungs- und Paarvernichtungstermen gerade die obige Reihenfolge eingehalten wird (oder in beiden Summanden die Reihenfolge der Operatoren vertauscht wird).

Die elementare Störungsrechnung läßt sich auch in dieser Formulierung der Quantenmechanik ohne weiteres durchführen. Der Verfasser hat am Beispiel des COMPTON-Effektes, der Elektron-Elektron-Streuung und der Selbstenergie des Elektrons nachgeprüft, daß sich genau dieselben Resultate ergeben wie in der üblichen Formulierung [5].

Die hier vorgeschlagenen neuen Vertauschungsregeln für die FOURIER-Amplituden des DIRAC-Feldes geben im x-Raum für den Antikommutator der ψ-Funktion:

$$[\boldsymbol{\psi}_\alpha(x), \overline{\boldsymbol{\psi}}_\beta(y)]_+ = -\,S^{(1)}_{\alpha\beta}(x-y)$$

und nicht, wie sonst üblich, die Funktion $S_{\alpha\beta}(x-y)$. (Die Bedeutung der Funktionen $S^{(1)}$ und S ist in den einschlägigen Lehrbüchern erklärt.)

Die neuen Vertauschungsregeln haben bei gleichen physikalischen Resultaten den Vorteil, daß der HAMILTON-Operator nichtnegative Eigenwerte besitzt, ohne daß eine Umformung nötig wäre, bei der eine unendliche Konstante auftritt. Der Vakuumerwartungswert des Stromoperators [geschrieben als σ-Produkt wie in (10)] verschwindet ebenso wie der des „ladungskonjugierten" Stromoperators und der Kommutator zweier Stromkomponenten verschwindet bei raumartigen Abständen.

[5] Man braucht dabei nur so weit zu gehen, daß man die Matrixelemente für die entsprechenden Prozesse berechnet. Die übrige Rechnung verläuft dann genau so, wie sie etwa bei HEITLER [3] steht.